

# Diagnose und Förderung mathematischer Kompetenzen

Jun.-Prof. Dr. Kathrin Winter  
Dr. Christoph Neugebauer  
Dr. Sebastian Krusekamp

# Gliederung

- Motivation und Einordnung
  - Diagnose, Förderung und Beratung
  - Bedürfnisse Studierender
- Diagnostische Anforderungen
  - Diagnostische Anforderungen an Lehrkräfte u. a. an Schulen
  - Diagnoseanforderungen im Hochschulbereich
- Diagnostische Online-Self-Assessments
  - Aktuelle Online-Self-Assessments
  - Entwicklung diagnostischer Online-Self-Assessments

# Motivation & Einordnung

## Diagnose, Förderung und Beratung



# Übergangsproblematik

- Studienabbruchquote als Indikator für Attraktivität und Effektivität der akademischen Ausbildung
  - Leistungsfähigkeit des tertiären Bildungssektors
- Häufige Gründe für Studienabbruch (vgl. Dieter 2011, Zimmermann 2008)
  - Studienbeginn impliziert generell Umstellungen, insbesondere im Fach Mathematik
    - Prozessbezogene Kompetenzen
    - Kognitive Kompetenzen
    - Vermittlungsdichte steigt an

# Bedürfnisse Studierender (unter anderem)

- Möglichst anonym, zeit- und ortsunabhängig Hilfestellungen nutzen können
  - *Vor Beginn des Studiums* Information über Einstiegsvoraussetzungen und Testen der eigenen Kompetenzen
  - *In der Studieneingangsphase* individuelles Üben, Beratung, Hilfestellungen, Überprüfen des eigenen Fortschritts
  - *Während des Studiums* selbiges als Prüfungsvorbereitung
- Ähnliches gilt für Schülerinnen und Schüler, Auszubildende und Berufstätige (insbesondere im Weiterbildungsbereich)

# Diagnostische Anforderungen

# Diagnostische Anforderungen u. a. an Lehrkräfte an Schulen

## Kompetenz 7:

„Lehrerinnen und Lehrer diagnostizieren Lernvoraussetzungen und Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern;

sie fördern Schülerinnen und Schüler gezielt und beraten Lernende und deren Eltern.“ (KMK 2004, S. 11)

Sie „konzipieren Aufgabenstellungen kriteriengerecht und formulieren sie adressatengerecht.“ (ebd., S. 11)

# Aufgabenbeispiel Mathematik

Für ein in England gekauftes Gerät finden Sie in der Betriebsanleitung die Druckangabe  **$2 \times 10^3$  psi**. Sie brauchen den Druck in bar. Dazu schlagen Sie nach:

psi steht für „**p**ound-**f**orce per **s**quare **i**inch“

1 pound-force = 4,448 N

1 inch = 2,54 cm

1 bar = 10 N/cm<sup>2</sup>

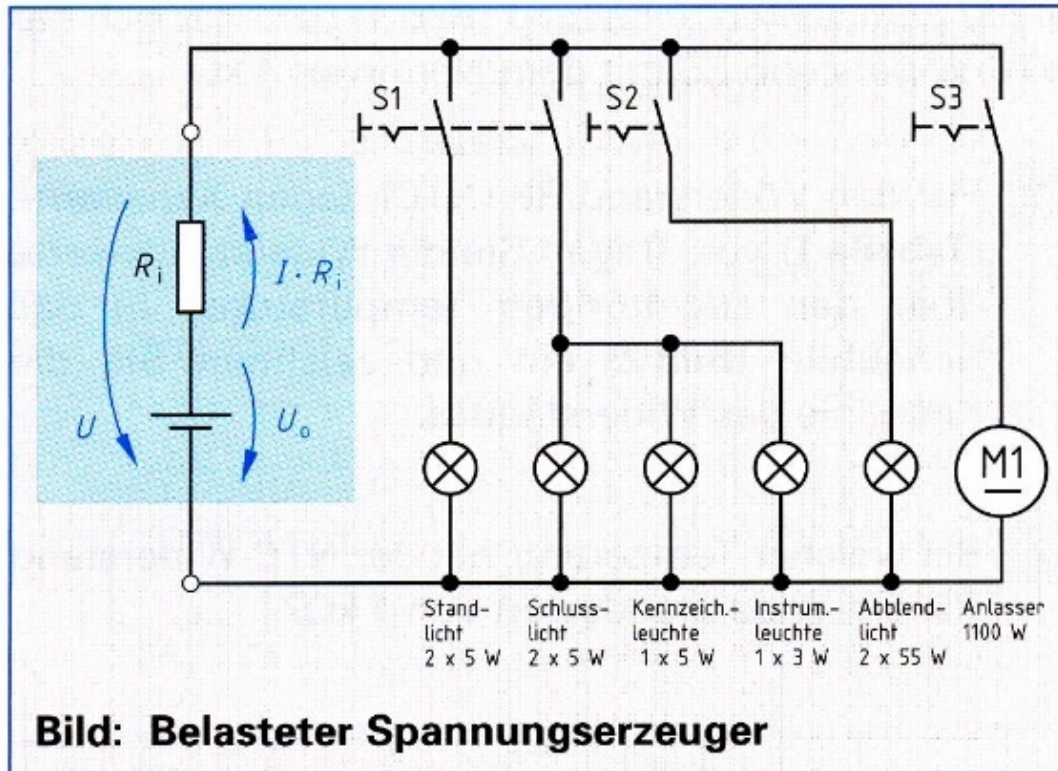
**Geben Sie den Druck in bar an, gerundet auf eine ganze Zahl.**

Ergebnis:

bar



# Aufgabenbeispiel Physik



Eine Akkumulatorenbatterie (**Bild**) in einem PKW hat 6 Zellen in Reihenschaltung mit je einer Leerlaufspannung von  $U_{01} = 2,0 \text{ V}$  und einem Innenwiderstand von  $R_{i1} = 2,5 \text{ m}\Omega$ . Die Bemessungskapazität beträgt 55 Ah.

- 1 Wie groß sind die Leerlaufspannung und der Innenwiderstand der Batterie?

[illegible]

Zur Lösung der Aufgabe wird angenommen, dass Innenwiderstand, Entladespannung und Lampenwiderstände unverändert bleiben.

- 2 Berechnen Sie die Betriebswiderstände der verschiedenen Lampen bei der Spannung  $U = 12 \text{ V}$ .

[illegible]

# Diagnoseanforderungen im Hochschulbereich

## An Dozierende:

- Im Rahmen der Programme zur „Verbesserung der Qualität der Lehre“
  - Ist-Standanalyse bei StudienanfängerInnen
  - Beratung, Anpassung der Seminare und Vorlesungen, weitere Unterstützungsmaßnahmen
  - Hochschulzulassungsprüfung u. ä.

## An Studierende:

- Kennenlernen der Anforderungen im Studium
- Einschätzung der eigenen Studierfähigkeit
- ...

# Diagnostische Online-Tests

# Ziele verschiedener Online-Self-Assessments

... dienen der Wissensüberprüfung und weisen punktuell auf Defizite hin ...

... eventuelle Wissenslücken vor Studienbeginn schließen ...

... auf Vorkursangebote hinweisen ...

... Passung zu bestimmten Studiengängen ...

... erfahren, wie gut Ihr Wissen zu den gewünschten Vorkenntnissen passt ...

... Diagnostik und Förderung...

... Selbsteinschätzung ...

... keine „Eignungsbescheinigung“ ...

# Online-Self-Assessments – Studieneingangstest zur Bionik

**bionik** Internationaler Studiengang Bionik (ISB)

Selbsttest Grundlagenwissen - Aufgaben

Stellen Sie die nachfolgend aufgeführte Gleichung um nach a:

$$a - b = \frac{a}{c}$$

☐  $\frac{1}{c+b}$

☒  $\frac{cb}{(c-1)}$

☐  $\frac{(1-cb)}{c}$

☐  $\frac{c(b-1)}{(c+1)}$

☐  $\frac{(c+1)}{(b-1)}$

☐  $\frac{bc}{(b-1)}$

☐  $\frac{1}{(b-c)}$

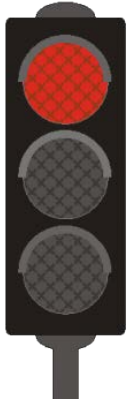
☒

Lösung zurück

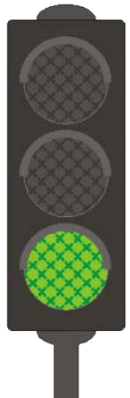
Selbsttest Grundlagenwissen - Aufgabenübersicht Mathematik	
Aufgabe 1	✓
Aufgabe 2	✓
Aufgabe 3	✗
Aufgabe 4	✓
Aufgabe 5	✗
Aufgabe 6	✗
Aufgabe 7	✓

(Ausschnitt aus [bionik.fbsm.hs-bremen.de](http://bionik.fbsm.hs-bremen.de) 2012)

# Feedbacks aktueller OSAs – Studieneingangstest zur Mathematik



Ihre Wissenslücken werden für Sie zu Studienbeginn vermutlich von Nachteil sein. Um dies zu vermeiden, sollten Sie sich mit den Inhalten, z. B. im **Rahmen eines Vorkurses, umfassend auseinandersetzen.**



Sie möchten Ihren Studienbeginn optimal gestalten?  
Eine weitere Beschäftigung mit den Inhalten, z. B. im **Rahmen eines Vorkurses, kann hierbei von Vorteil sein.**



Der Studienbeginn wird Ihnen gewiss leichter fallen, wenn Sie die Inhalte, z. B. im **Rahmen eines Vorkurses, noch einmal wiederholen.**

<https://www.studifinder.de/?ac=studycheck-start>, Stand: 02/2015



# Online-Self-Assessments – Studieneingangstest zur Geographie

- ☐ Der letzte Winter war relativ mild. Daraus lässt sich schließen, dass der globale Temperaturanstieg bereits spürbar ist.
- ☐ Der Einbau von Filtern in die Abluft von Braunkohlekraftwerken hat dafür gesorgt, dass sich der Eintrag von „Saurem Regen“ in die Waldökosysteme reduziert hat.
- ☐ Die starke Einstrahlung der Sonne um 24 h Mitteleuropäischer Sommerzeit führte dazu, dass in Australien die Regel: „Between 10 and 3 – under a tree“ in Schulen eingeführt wurde.
- ☐ Die Ausdehnung der Wüsten (Desertifikation) ist ausschließlich ein Resultat der CO<sub>2</sub>-Emissionen der Industrieländer.
- ☐ Die Stadt-Land Disparitäten haben ihren Ursprung in der Industrialisierung im 19. Jahrhundert.
- ☐ Der suburbane Raum gewinnt seit 30 Jahren an Bedeutung im Einzelhandel.
- ☐ Seit den 1950er Jahren haben beständig gestiegener Wohlstand und zunehmender Individualverkehr zu einer Ausweitung von Siedlungs- und Verkehrsflächen geführt und damit auch zur Entwicklung der Raumplanung.

(<http://www.uni-bremen.de/studium/studienorientierung/selbsttests-selfassessments.html>)

# Feedbacks aktueller OSAs – Studieneingangstest zur Geographie

*Vorgehen: **keine** Antwort ausgewählt, jeweils nur den „Weiter-Button“ geklickt!*

## Ihr Feedback

Beim Verständnis geographischer Texte unterlaufen Ihnen manchmal Fehler. Die von uns gewählten Beispiele sind durchaus anspruchsvoll. Dennoch sollte Ihnen bewusst sein, dass die Auseinandersetzung mit wissenschaftlichen Texten einen großen Raum im Geographiestudium einnimmt.

Sie schaffen es, logisch korrekte Schlüsse zu ziehen. Diese Fähigkeit ist im Geographiestudium für die Beurteilung von Theorien sehr wichtig!

Im Bereich der Statistik verfügen Sie nur über geringe Vorkenntnisse. Die relevanten Methoden werden im Studium behandelt. Ein gewisses mathematisches Verständnis und Interesse an der Thematik sind aber sehr wichtig.

(<http://www.uni-bremen.de/studium/studienorientierung/selbsttests-selfassessments.html>)



# Online-Self-Assessments (OSAs) – Kritiken

*Als Orientierungs- und Entscheidungshilfe* (vgl. Gollub, Meyer-Buckel 2014)

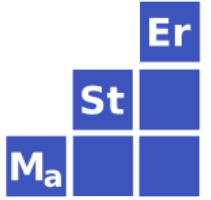
- „Angebote [werden] ihren eigenen Versprechen nicht gerecht.“
- „Keine Entscheidungshilfe“
- „Widersprüchliche Rückmeldungen“
- Gegenwärtige Angebote bieten „kaum mehr als Kommunikationsanlass, auf den persönliche Beratungsgespräche zwingend folgen müssen.“
- Zweifel an „ausreichend wissenschaftlicher Expertise“ vieler geförderter Hochschulstandorte in Bezug auf „valide Testkonstruktion“

# Online-Self-Assessments (OSAs) – Kritiken

*Passung und Diagnostik* (vgl. Neugebauer 2013, Sauer 2013, Winter 2013)

- Selten studiengangsspezifisch
- Diagnostisches Potential wenig / gar nicht genutzt
- Selten mehr als Rückmeldung von Quoten
- Zuordnung mathematischer Themengebiete eingeschränkt
- Keine konkreten inhaltsbezogenen, individualisierten Förderhinweise

# Das Projekt MaStEr



## MaStEr: Mathematik Studieren mit Erfolg

- Projekt an der WWU Münster zur Entwicklung von Diagnose- und Förderkonzepten sowie -materialien für Studierende und Studieninteressierte
- Distraktoren mit diagnostischem Potenzial
- Frei zugängliche Aufgaben-/Testpools
- Individuelle Testzusammenstellung
- Erweiterung des Konzepts auf andere Fächer
- Homepage: [www.MathematikStudierenmitErfolg.weebly.com](http://www.MathematikStudierenmitErfolg.weebly.com)

# Das Projekt DTA

DTA: diagnostische Testaufgaben

- Kooperationsprojekt der Universitäten Darmstadt, Münster, Bochum
- Grundlagenforschung zu diagnostischen Testaufgaben in unterschiedlichen Formaten
- Mathematische Inhalte aus Sek I und II

# Das Projekt dOT



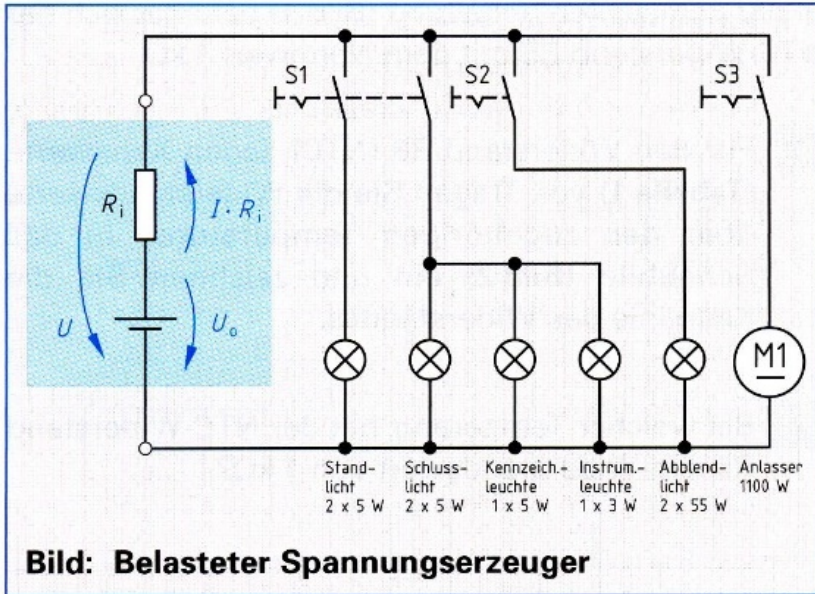
dOT: diagnostische Online-Tests

- Entwicklung diagnostischer Online-Tests Mathematik
- Einbindung in ILIAS
- Kooperationsprojekt mehrerer Universitäten und Fachhochschulen
- Für unterschiedliche Studiengänge
- Einsatz auch in Schulen geplant
  - als Selbsttest für Schülerinnen und Schüler
  - als Hilfestellung zur Beratung durch Lehrkräfte

# Forschungsdesign

- U. a. rationale und empirische Aufgabenanalysen, Interviewstudien
- „Codierung“ idealtypischer korrekter und fehlerhafter Antworten in Distraktoren (sichtbar – nicht sichtbar)
- Testdesign
  - Vergleich offenes Antwortformat – geschlossenes Testdesign mit diagnostischen Distraktoren (Papiertest und computerbasierte Testung)
  - Inhaltliche Übereinstimmung der idealtypischen Antworten
  - Auftretenshäufigkeit übereinstimmend
    - theoretisch höhere Ratewahrscheinlichkeit durch MC-Testung widerlegt

# F



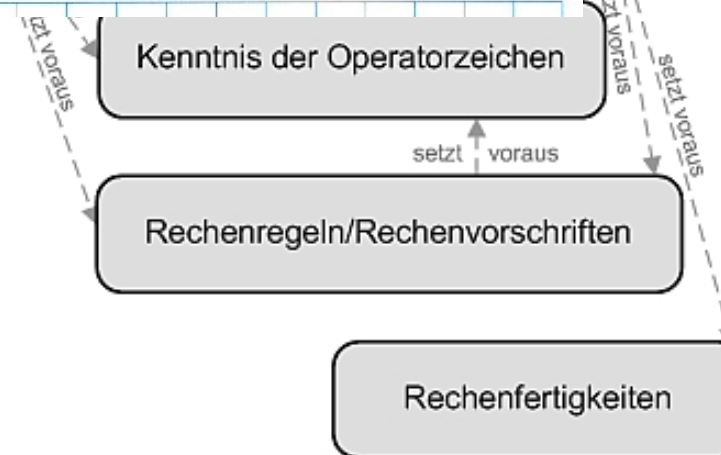
Eine Akkumulatorenbatterie (**Bild**) in einem PKW hat 6 Zellen in Reihenschaltung mit je einer Leerlaufspannung von  $U_{01} = 2,0 \text{ V}$  und einem Innenwiderstand von  $R_{i1} = 2,5 \text{ m}\Omega$ . Die Bemessungskapazität beträgt 55 Ah.

- 1 Wie groß sind die Leerlaufspannung und der Innenwiderstand der Batterie?

[illegible]

Zur Lösung der Aufgabe wird angenommen, dass Innenwiderstand, Entladespannung und Lampenwiderstände unverändert bleiben.

- 2 Berechnen Sie die Betriebswiderstände der verschiedenen Lampen bei der Spannung  $U = 12 \text{ V}$ .



(Winter 2011, S. 101ff)

# Empirische Aufgabenanalyse – typische Fehler analysieren

- Ein Ergebnis – mehrere mögliche Wege?!

$$4\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \frac{13}{3} + \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \frac{26}{15}$$

$$\rightarrow 1\frac{11}{15}$$



# Empirische Aufgabenanalyse – typische Fehler analysieren

- Ein Ergebnis – mehrere mögliche Wege?!

$$\begin{aligned} & 4\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \\ \rightarrow & \frac{20 + 6}{15} \\ \rightarrow & \frac{26}{15} \\ \rightarrow & 1\frac{11}{15} \end{aligned}$$

# Aufgabenanalyse – Formulierung in sog. Fehlermustern

- Im konkreten Fall konnten zwei Fehlermuster generiert werden:

Typ	Fehlermuster	Fehlerphänomen
G1	$g \frac{a}{b} \rightarrow \frac{g \cdot a}{b}$	$4 \frac{1}{3} \rightarrow \frac{4 \cdot 1}{3}$
A3	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{13}{3} + \frac{2}{5} \rightarrow \frac{13 \cdot 2}{3 \cdot 5} \rightarrow \frac{26}{15}$

# Beispielaufgabe

Schreiben Sie als ein Bruch. Kürzen Sie so weit wie möglich, falls dies möglich ist.  $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

☐ 1

☐  $\frac{x^2 + 4}{2x}$

☐  $\frac{x+2}{2+x}$

☐  $\frac{x^2 + 2}{2x}$

☐  $\frac{x+4}{2}$

☐  $\frac{x^2 + 4}{2+x}$

☐ Ich kenne die Antwort nicht.

☐ Meine Lösung lautet:

# Typische Fehler zielgruppenadäquat konstruieren

## Auswahlhäufigkeiten

Distraktor	%	Wertung
1	38,8	f
2	18,4	r
3	28,2	f
4	1,9	f
5	1,9	f
6	0	f
7	6,8	k. A.
8	3,9	andere Lösung

Schreiben Sie als ein Bruch. Kürzen Sie so weit wie möglich, falls dies möglich ist.  $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

☐ 1

☐  $\frac{x^2 + 4}{2x}$

☐  $\frac{x + 2}{2 + x}$

☐  $\frac{x^2 + 2}{2x}$

☐  $\frac{x + 4}{2}$

☐  $\frac{x^2 + 4}{2 + x}$

☐ Ich kenne die Antwort nicht.

☐ Meine Lösung lautet:

# Distraktor 1 – Diagnostischer Hintergrund

Schreiben Sie als ein Bruch. Kürzen Sie so weit wie möglich, falls dies möglich ist.  $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$



1

## Distraktor 3 – Diagnostischer Hintergrund

Schreiben Sie als ein Bruch. Kürzen Sie so weit wie möglich, falls dies möglich ist.  $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

$\frac{x+2}{2+x}$

# Distraktor 6 – Diagnostischer Hintergrund

Schreiben Sie als ein Bruch. Kürzen Sie so weit wie möglich, falls dies möglich ist.  $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

$\frac{x^2 + 4}{2 + x}$



## Bruchterme mit Variablen (1)

Fassen Sie den Ausdruck  $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$  zu einem Bruch zusammen. Kürzen Sie so weit wie möglich.

- ☐  $\frac{x+2}{2x}$
- ☒  $\frac{x+2}{2+x}$
- ☐  $\frac{x^2+2}{x}$
- ☐  $\frac{x^2+4}{2x}$
- ☐  $\frac{x+4}{2}$
- ☐  $\frac{2x}{2+x}$
- ☐  $x + 2$
- ☐ Meine Lösung ist nicht dabei.
- ☐ Ich kenne die Lösung nicht.







- ☐ d
- ☐ Meine Lösung ist nicht dabei.
- ☐ Ich kenne die Lösung nicht.

19. Bruchterme mit Variablen (1) [ID: 155]

## 19. Bruchterme mit Variablen (1) [ID: 155]

Fassen Sie den Ausdruck  $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$  zu einem Bruch zusammen. Kürzen Sie so weit wie möglich.

- ☐  $\frac{x+2}{2x}$
- ☒  $\frac{x+2}{2+x}$

Vermutlich haben Sie die Brüche nicht auf den gleichen Nenner gebracht und das Vorgehen bei der Multiplikation und Addition verwechselt. Das korrekte Ergebnis lautet  $\frac{x^2+4}{2x}$ .

- ☐  $\frac{x^2+2}{x}$
- ☐  $\frac{x^2+4}{2x}$
- ☐  $\frac{x+4}{2}$

Schreiben Sie den Ausdruck  $2x : \frac{4}{x}$  in Form eines Bruches. Kürzen Sie so weit wie möglich.

- ☐  $2x \cdot \frac{x}{4}$
- ☐  $\frac{4}{2x^2}$

Mathematische Themenbereiche  
– weiter aufgeschlüsselt

Wiederholung der Testaufgabe

Eigene gewählte Antwort

Diagnostische Rückmeldung zur  
eigenen gewählten Antwort

# Vielen Dank!

Kontakt:

winter.kathrin@wwu.de

neugebauer@wwu.de

sebastian.krusekamp@wwu.de

# Literatur

- Bastian, P., Eichler, W., Riefler, S., Rinn, H., Spielvogel, O., Tkotz, K., Winter, U. (2005): Rechenbuch Elektrotechnik – Ein Lehr- und Übungsbuch zur Grund- und Fachstufe. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 16., überarb. Aufl.
- Bromme, R., Seeger, F., Steinbrink, H. (1990): Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler. In: IDM-Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 14, Aulis-Verlag, Köln.
- Bundesamt für Migration und Flüchtlinge (2010): Bundesweites Integrationsprogramm Angebote der Integrationsförderung in Deutschland – Empfehlungen zu ihrer Weiterentwicklung. Quelle: [http://www.bamf.de/SharedDocs/Anlagen/DE/Downloads/Infothek/Integrationsprogramm/bundesweitesintegrationsprogramm.pdf?\\_\\_blob=publicationFile](http://www.bamf.de/SharedDocs/Anlagen/DE/Downloads/Infothek/Integrationsprogramm/bundesweitesintegrationsprogramm.pdf?__blob=publicationFile)
- Dieter, M. (2012): Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren. Dissertation, Universität Duisburg-Essen
- Gerster, H.-D., Grevsmühl, U. (1983): Diagnose individueller Schülerfehler beim Rechnen mit Brüchen. In: Pädagogische Welt 11/1983, S. 654-660.
- Hasemann, K. (1985): Die Beschreibung von Schülerfehlern mit kognitionstheoretischen Modellen. In: Hasemann K. (Hrsg.): Fehleranalysen – Mathematische Denkprozesse. Der Mathematikunterricht. Jahrgang 31, Heft 6. S. 6-15.
- Hoffart 2009: Zum diagnostischen Potential von Aufgaben in Orientierungsarbeiten – Rationale und empirische Aufgabenanalyse. Quelle: [http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2009/Beitraege/HOFFART\\_Eva\\_2009\\_Aufgabenanalyse.pdf](http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2009/Beitraege/HOFFART_Eva_2009_Aufgabenanalyse.pdf). Letztes Abrufdatum: 26.01.2013.
- Hart, K. (1981): Children's understanding of mathematics (Vol. 11-16). Murray, London
- Hoffart, E. (2008): Aufgabenanalysen und Analyse von Schülerbearbeitungen – Überlegungen zur hessischen Orientierungsarbeit. In: Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik 2008 in Budapest, dtv Franzbecker, Hildesheim
- KMK (2004): Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.12.2004). Quelle: [http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen\\_beschluesse/2004/2004\\_12\\_16-Standards-Lehrerbildung.pdf](http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Standards-Lehrerbildung.pdf).

# Literatur

- Moser-Optiz, Nührenbürger (2015): Diagnostik und Leistungsbeurteilung. In: Handbuch der Mathematikdidaktik, Springer-Verlag.
- Lorenz, J. H. (1987): Zur Methodologie der Fehleranalyse in der mathematikdidaktischen Forschung. In: Journal für Mathematikdidaktik. (8), S. 205-228.
- Lörcher, G. A. (1982): Diagnose von Schülerschwierigkeiten beim Bruchrechnen. In: Pädagogische Welt, Heft 3, S. 172-180
- Hoffart, E. (2009): Zum diagnostischen Potential von Aufgaben in Orientierungsarbeiten – Rationale und empirische Aufgabenanalyse. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 651-654.
- Neugebauer, C., Sauer, K, Winter, K. in Stein (Hrsg.) (2013): Mathematik Online - Studien zu mathematischen Self-Assessment-Tests und Übungsplattformen im Internet
- PIK AS (2015): Sprachförderung, Wortspeicher, Forscherhefte: <http://pikas.dzlm.de/material-pik/herausfordernde-lernangebote/haus-8-unterrichts-material/forscherheft-mal-plus-haus/forscherheft-mal-plus-haus.html>
- Radatz, H. (1985): Möglichkeiten und Grenzen der Fehleranalyse im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht, Nr. 31(6), Friedrich Verlag, Seelze-Velber, S. 18-24
- Oser, F., Hascher, T., Spychiger, M. (1999): Lernen aus Fehlern, Zur Psychologie des negativen Wissens. In: Althof, Wolfgang (Hrsg.): Fehler-Welten. Leske + Budrich, Opladen, S. 11-41.
- Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential (Dissertation). Münster, WTM-Verlag.
- Winter, K., Wittmann, G. (2009): Wo liegt der Fehler? Schülerinnen und Schüler analysieren fehlerhafte Lösungswege beim Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen. In: Praxis Mathematik Heft 27/2009. S. 15-21.
- Zimmermann, S. (2008): Gründe für den Studienabbruch an der ETH Zürich. Masterarbeit, ETH Zürich